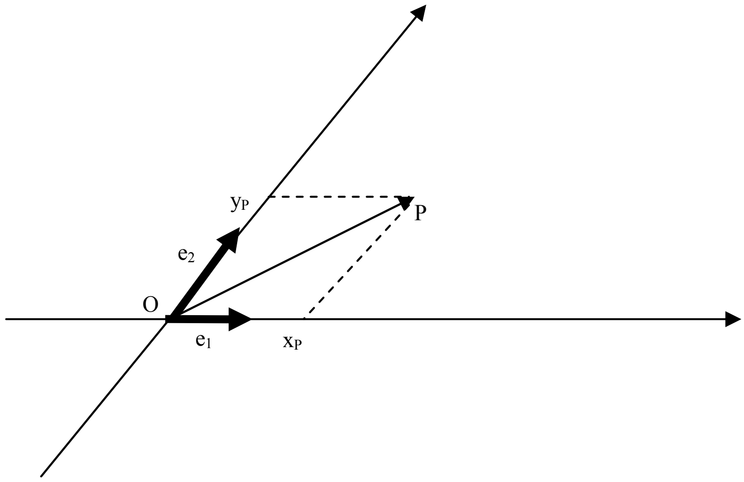
Esercizio

Diagonalizzare la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

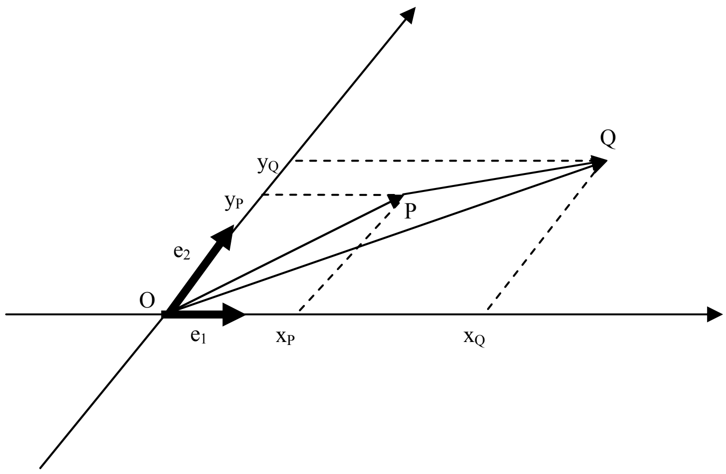
Nel piano affine $A_2(\mathbb{R})$ dotato di un riferimento affine $(O,\mathcal{B})$ ogni punto P può essere rappresentato mediante una coppia di coordinate**: coppia delle componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$**

$$P = (x_P, y_P) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = x_P \overrightarrow{e_1} + y_P \overrightarrow{e_2}$$



Presi due punti P e Q, il vettore $\overrightarrow{PQ}$ è:

$$P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \quad \overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P)\overrightarrow{e_1} + (y_Q - y_P)\overrightarrow{e_2}$$



Retta

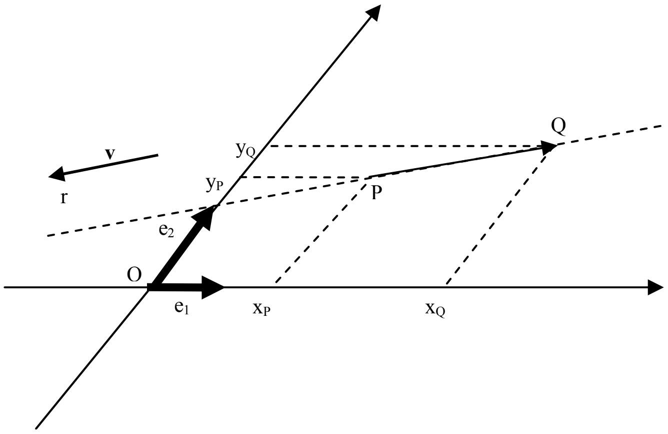
Sia L(**v**)=V, **v** vettore non nullo, sottospazio vettoriale di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ allora il sottospazio affine

$$r=[P,V\,]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{PQ}\in V\}$$

è la retta passante per P con spazio direttore V.

Se $P=(x_P,y_P), Q=(x,y) \quad \overrightarrow{PQ}=(x-x_P)\overrightarrow{e_1}+(y-y_P)\overrightarrow{e_2}$

e se **v**=(m,n), componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora



$\overrightarrow{PQ}\in V$ se e solo se esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che

$x-x_P=\lambda m$ e $y-y_P=\lambda n$ ((m,n) parametri direttori)

Equazioni parametriche della retta $\begin{cases} x=x_p+\lambda m \\ y=y_P+\lambda n \end{cases} \quad \lambda\in R$

Dalle quali eliminando il parametro λ si ottiene

$(y-y_P)m=(x-x_P)n \qquad nx-my-nx_P+my_P=0$ da cui

Equazione cartesiana della retta $ax+by+c=0$ con $(a,b)\neq(0,0)$

Esercizio 1

Sia $(O,\mathcal{B})$ un riferimento affine nel piano $A_2(\mathbb{R})$. Determinare le equazioni parametriche della retta:

a) passante per $P=(-2,1)$ e parametri direttori $(3,1)$;

b) passante per i punti $A=(1,2)$ e $B=(-1,3)$.

Ricavare dalle equazioni trovate le rispettive equazioni cartesiane.

Svolgimento

a) Se $P=(-2,1), Q=(x,y) \quad \overrightarrow{PQ}=(x-(-2))\vec{e_1}+(y-1)\vec{e_2}$

e se $\mathbf{v}=(3,1)$, componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora

$$r=[P, L(\mathbf{v})]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{PQ}\in L(\mathbf{v})\}$$

e $\overrightarrow{PQ}\in L(\mathbf{v})$ se e solo se esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che

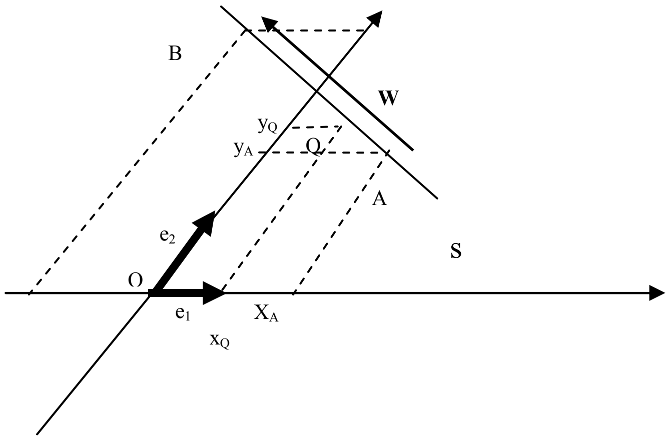
$$x+2=\lambda\cdot 3 \quad \text{e} \quad y-1=\lambda\cdot 1$$

$$\boxed{r:\begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \quad \lambda\in R}$$

b) $\mathbf{w}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(-1-1,3-2)=(-2,1)$, posso scegliere A come punto origine della retta

$$A=(1,2), Q=(x,y) \quad \overrightarrow{AQ}=(x-1)\vec{e_1}+(y-2)\vec{e_2}$$

$$s=[A, L(\mathbf{w})]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{AQ} \in L(\mathbf{w})\}$$



e $\overrightarrow{AQ} \in L(\mathbf{w})$ se e solo se esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che

$$x-1=\lambda\cdot(-2) \quad e \quad y-2=\lambda\cdot 1$$

$$\boxed{s: \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 2+\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R}$$

Osservazione: notiamo che i parametri direttori sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità diverso da 0;

le equazioni:

$$\begin{cases} x = -2-3\lambda \\ y = 1-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad\qquad \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 1+\lambda/3 \end{cases} \quad \lambda \in R$$

rappresentano sempre la retta r.

c) Per ricavare una equazione cartesiana di r basta isolare il parametro λ da una delle due equazioni parametriche e sostituire nell'altra:

$$r:\begin{cases} \mathrm{x} = -2 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad \begin{cases} \mathrm{x} = -2 + 3(y-1) \\ y - 1 = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$$

da cui r: x-3y+5=0.

Analogamente per s:

$$s:\begin{cases} \mathrm{x} = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad \begin{cases} \mathrm{x} = 1 - 2(y-2) \\ y - 2 = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$$

da cui s: x+2y-5=0.

Esercizi da svolgere

Determinare le equazioni parametriche e cartesiane delle rette:

a) passante per A=(2;-3) di parametri direttori (1,0);

b) passante per B=(0,-3) e spazio direttore $V=\{(\alpha,\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\}$

c) determinare la retta passante per i punti C=(-2,0) e D=(1,-1).

Esercizio 2

Data la retta t di equazione cartesiana 2x+3y-1=0, determinare la sua rappresentazione parametrica.

1° modo: pongo x=λ ottenendo

$$t:\begin{cases} \mathrm{x}=\lambda \\ y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$$

equivale ad aver scelto come punto origine della retta A=(0,1/3) e par.dir (1,-2/3).

2° modo: scelgo due punti appartenenti alla retta T_1=(0,1/3) e T_2=(1/2,0), trovo il vettore $\overrightarrow{T_1T_2}$ =(1/2, -1/3) e scelgo come punto origine della retta T_2:

$$t:\begin{cases} \mathrm{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y=0-\frac{1}{3}\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$$

Osservazione: la classe dei parametri direttori (lo spazio direttore) si ottiene risolvendo l'equazione lineare omogenea associata.

In questo caso 2x+3y=0 $\Rightarrow$ (α, -2/3α).

In generale data un'equazione cartesiana della retta

r: ax+by+c=0 con (a,b)$\neq$(0,0) e **<u>parametri direttori [(b,-a)]</u>**

Equazione parametrica della retta $\begin{cases} \mathrm{x}=\mathrm{x_p}+\lambda b \\ y=y_P+\lambda(-a) \end{cases} \quad \lambda \in R$

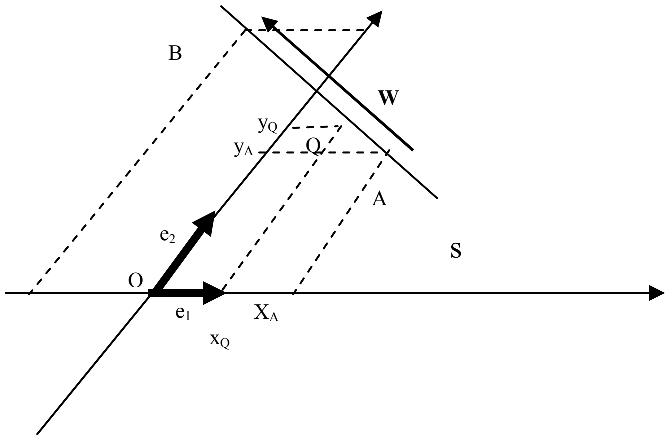
Equazione cartesiana della retta passante per due punti A, B

$A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$ $\quad \mathbf{w}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$

posso scegliere A come punto origine della retta

$$A=(x_A,y_A),\ Q=(x,y) \quad \overrightarrow{AQ}=(x-x_A)\vec{e_1}+(y-y_A)\vec{e_2}$$

$$s=[A, L(\mathbf{w})]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{AQ}\in L(\mathbf{w})\}$$



e $\overrightarrow{AQ}\in L(\mathbf{w})$ se e solo se è combinazione lineare di **w**

$$\det\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A \end{pmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_{\mathbf{B}} & y_B & 1 \end{pmatrix}=0$$

La prima condizione dà la nota equazione, con <u>condizioni sui denominatori</u>, studiata alle superiori

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

Esercizio 3

Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti A=(-2,2) e B=(3,2).

Posso risolvere l'esercizio trovando le equazioni anche separatamente:

A=(-2,2) e B=(3,2) **w**= $\overrightarrow{AB}$ =(3-(-2),2-2)=**(5,0)**

$$Q=(x,y) \quad \overrightarrow{AQ}=(x-(-2),y-2)$$

Equazioni parametriche

$$\rightarrow \begin{cases} x=-2+5\lambda \\ y=2 \end{cases} \quad \lambda \in R$$

Equazione cartesiana

$$\det\begin{pmatrix} x+2 & y-2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow y-2=0$$

Condizione di parallelismo

Date due rette r, s nel piano affine

r=[P, L(**v**)]={Q∈ $A_2(\mathbb{R})$ | $\overrightarrow{PQ}$ ∈L(**v**)} **v≠0**

s=[S, L(**w**)]={Q∈ $A_2(\mathbb{R})$ | $\overrightarrow{SQ}$ ∈L(**w**)} **w≠0**

esse risultano parallele se e solo se L(**v**)= L(**w**) ossia se e solo se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{w}$, cioè se i parametri direttori risultano proporzionali.

Esercizio 4

Date le equazioni delle seguenti coppie di rette verificare che siano parallele:

a) $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathrm{R}$ e $s: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathrm{R}$

b) $p: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathrm{R}$ e $q: 3x + y - 2 = 0$

a) le rette r e s sono parallele perché i parametri direttori di r sono $\rho_1(2,-1)$ uguali a quelli di s: $\rho_2(-2,1)$:

classe dei parametri direttori [(2,-1)].

b) I parametri direttori della retta p sono [(1,0)], quelli di q: [(1,-3)] (equazione omog. ass. y=-3x). Le rette p e q non sono parallele.

Esercizio 5

a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiana delle rette passanti per A=(2,-3) parallele alle rette

$$r:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \lambda \in R \qquad \text{e} \qquad \mathrm{s: x + 2y - 2 = 0} \; ;$$

b) Scrivere l'equazione della retta passante per C=(1,1) parallela a quella passante per D=(0,1) e E=(-2,3).

Svolgimento

a) i parametri direttori di r sono [(1,3)], mentre quelli della retta s sono [(-2,1)]: le rette richieste sono rispettivamente p e q:

$$p:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3+3\lambda \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{q}:\begin{cases} \mathrm{x = 2 - 2}\lambda \\ \mathrm{y = -3 +} \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathrm{R}$$

Per ottenere le equazioni cartesiane:

p: $\det\begin{pmatrix} x-2 & y+3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$ cioè y-3x+9=0

q: $\det\begin{pmatrix} x-2 & y+3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 0$ cioè x+2y+4=0

b) il vettore $\overrightarrow{DE}$ =(-2,2) dà la direzione della retta passante per C:

$$t:\begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 1+2\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

L'equazione cartesiana è:

t: $\det\begin{pmatrix} x-1 & y-1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$ cioè x+y-2=0

Condizione di allineamento di tre punti

Siano A=(x_A,y_A) e B=(x_B,y_B) **w**= $\overrightarrow{AB}$ =(x_B-x_A,y_B-y_A), allora C=(x_C,y_C) è allineato con A e B se e solo se la retta che passa per A, B contiene C cioè se il vettore **v**= $\overrightarrow{AC}$ appartiene a L(**w**): se e solo se **v** è combinazione lineare di **w**:

$$\det\begin{pmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\begin{pmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_{\mathbf{B}} & y_B & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Esercizio 6

Verificare che i tre punti A=(1,0), B=(3,-1), C=(-1,1) sono allineati.

Svolgimento

$$\det\begin{pmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1-1 & 1 \\ 3-1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

Verificato!

Mutua posizione tra due rette nel piano

$$r: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \qquad s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

studiando le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases} \qquad \mathrm{A}|\mathrm{B} = \left(\begin{array}{cc|c} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 & -c_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 & -c_2 \end{array}\right)$$

otteniamo i seguenti tre casi:

a) r(A)=r(A|B)=2 cioè $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ allora il sistema ammette una e una sola soluzione che rappresenta il punto d'intersezione e le **rette sono incidenti**.

b) r(A)=1 mentre r(A|B)=2 cioè $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{-c_1}{-c_2}$ allora il sistema non ammette soluzione e le **rette sono parallele distinte**.

c) r(A)=r(A|B)=1 cioè $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{-c_1}{-c_2}$ allora il sistema ammette infinite soluzioni che rappresentano i punti di una retta e le **rette sono parallele coincidenti**.

Esercizio 7

Sia (O,$\mathcal{B}$) un riferimento affine nel piano $A_2(\mathbb{R})$.

Determinare le eventuali intersezioni delle seguenti coppie di rette.

a) r: 2x+y-3=0 e s: 2x-y=0

b) p: x+y-2=0 e q: 2x+2x+1=0

c) t: 3x-y=1 e u: 2y-6x+2=0

Svolgimento

a) $$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases} \quad \mathrm{r(A)}=\mathrm{r(A|B)}=2$$

rette incidenti in P=(3/4,3/2);

b)

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=-1 \end{cases} \quad \mathrm{r(A)}=1 \qquad \mathrm{r(A|B)}=2$$

rette parallele distinte;

c)

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ -6x+2y=-2 \end{cases} \quad \mathrm{r(A)}=\mathrm{r(A|B)}=1$$

rette parallele coincidenti (soluzioni y=3x-1)

Osservazione: due rette r e s sono incidenti se esiste un solo punto di coordinate opportune $P=(x_P,y_P)$ tali che $P\in r$ e $P\in s$.

Se le rette sono rappresentate in forma parametrica

$$r:\begin{cases} x=x_A+m_1\lambda \\ y=y_A+n_1\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{s}:\begin{cases} x=x_B+m_2\lambda \\ y=y_B+n_2\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R}$$

dovranno allora esistere λ_1 e λ_2 numeri reali opportuni tali che:

$$\begin{cases} x_p=x_A+m_1\lambda_1 \\ y_P=y_A+n_1\lambda_1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_P=x_B+m_2\lambda_2 \\ y_P=y_B+n_2\lambda_2 \end{cases}$$

Si ottiene quindi un sistema di quattro equazioni in quattro incognite: x_P, y_P, λ_1 e λ_2

$$\begin{cases} x_p = x_A + m_1\lambda_1 \\ y_P = y_A + n_1\lambda_1 \\ x_P = x_B + m_2\lambda_2 \\ y_P = y_B + n_2\lambda_2 \end{cases} .$$

I casi possibili sono:

a) esiste una soluzione $(x_P,y_P,\lambda_1,\lambda_2)$ e le rette risultano incidenti nel punto $P=(x_P,y_P)$;

b) non esiste soluzione e le rette risultano parallele distinte;

c) esistono infinite soluzioni $(x_P,y_P,\lambda_1,\lambda_2)$ e le rette risultano parallele coincidenti.

Vista la complessità dei conti, è meglio trovare prima le equazioni cartesiane e ricondursi alla discussione già vista.

Esempio

$$r:\begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = 1-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathrm{R} \qquad \text{e} \qquad s:\begin{cases} x = 4-2\gamma \\ y = \gamma \end{cases} \quad \gamma \in \mathrm{R}$$

Il sistema delle quattro equazioni è impossibile:

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ x = 4 - 2\gamma \\ y = 1 - \lambda \\ y = \gamma \end{cases}$$

Ma allo stesso risultato si perveniva confrontando le due equazioni cartesiane: x+2y-1=0 e x+2y-4=0.

Esercizi da svolgere

a) Determinare un'equazione cartesiana della retta passante per A=(-2,2) e B=(1,-3);

b) Determinare le equazioni parametriche della retta passante per A=(0,-1) parallela alla retta s di equazione3x+y-2=0;

c) Determinare le coordinate del punto d'intersezione delle rette:

$$r:\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathrm{R} \qquad \text{e} \qquad s:\begin{cases} x = 4 - 4\gamma \\ y = -1 + \gamma \end{cases} \quad \gamma \in \mathrm{R} \quad ;$$

d) Determinare le equazioni parametriche della retta parallela a

$$p:\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathrm{R}$$

passante per il punto d'intersezione tra le rette r e s dell'esercizio c).