Correzione della fila 1 della prova intermedia

5 novembre 2009

Esercizio 1

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k+2 \\ 0 & -1 & -k \\ k+1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ha determinante $-k^2+4k-3$ diverso da zero se e solo se $k \neq 1 \wedge k \neq 3$. In tale caso $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$.

Per k=1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rho(A) = \rho(A|B) = 2.$$

Per k=3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rho(A) = 2, \quad \rho(A|B) = 3.$$

Per k=1 il sistema associato è:

$$\begin{cases} x+2y=1-3z \\ -y=z \end{cases}$$

Da cui ponendo z=α si ottiene x=1-α, y=-α.

Ricapitolando:

- Se **k≠1∧k≠3** ρ(A)= ρ(A| B)=3;

  k=1 ρ(A)= ρ(A| B)=2;

  k=3 ρ(A)=2, ρ(A| B)=3.

- Per **k≠3** :

  k≠1∧k≠3 il sistema è di Cramer e ammette **una sola soluzione**;

  per k=1 il sistema ammette **infinte soluzioni**.

- **S={(1-α,-α, α)|α∈ℝ}.**

Esercizio 2

Lo spazio vettoriale U è generato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ma esse non sono l.ind. (es: la III è la I+II). Una base di U è quindi costituita da:

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)$$ **e dimU=2**

La matrice A appartiene ad U se e solo se la matrice delle componenti di A e delle matrici della base di U ha rango 2:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 2k & 1 & -1 & 2k+1\end{pmatrix}$$ (la IV colonna è la I-III)

Imponiamo che il determinante selezionato sia nullo: **k=-1**. Per questo valore il rango è sicuramente 2.

Esercizio 3

W ha dimensione 2.

I vettori di A_k sono sempre linearmente indipendenti:

$$\rho\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ k & 0 & 2k & 1\\ 0 & 1 & k+1 & 0\end{pmatrix} = 3$$ infatti…

- dim $L(A_k)$= 3 e una base è fornita da A_k.

Posto k=0 la base diventa di $L(A_0)$

((1,-1,2,-2),(0,0,0,1),(0,1,1,0))

Studio la dimensione dello spazio $L(A_k)$+W attraverso il rango di;

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \quad .$$

Dunque dim[L(A_k)+W]=4 e una base è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Per il teorema di Grassmann la dimensione dell'intersezione L(A_k)$\cap$W è 1; i vettori che appartengono all'intersezione sono:

$\exists\alpha,\beta,\gamma,x,y\in\mathbb{R}$ tali che

$$\alpha(1,-1,2,-2)+\beta(0,0,0,1)+\gamma(0,1,1,0)=x(1,1,4,0)+y(0,0,1,0)$$

$$\ldots(x,x,4x,0).$$

$$L(A_k)\cap W=\{(x,x,4x,0)|x\in\mathbb{R}\}.$$

dim[L(A_k)$\cap$W]=1 e base ((1,1,4,0)).

Esercizio 4

Soltanto la coppia $(1,0,-1)\circ(0,1,0)=0$.

Il complemento ortogonale di A è costituito dai vettori (x,y,z) tali che:

$$\begin{cases} (x,y,z)\circ(1,0,-1)=0 \\ (x,y,z)\circ(-1,2,1)=0 \\ (x,y,z)\circ(0,1,0)=0 \end{cases}$$

concludendo che y=0 e x-z=0:

$$A^{\perp}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-z=0 \wedge y=0\}=\{(\alpha,0,\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}=$$
$$=L((1,0,1))$$

Esercizio 5

$$A_k=\begin{pmatrix} k+1 & 0 & 3k \\ k & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Il polinomio caratteristico è

$$(k+1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda).$$

Gli autovalori sono quindi:

$$\lambda_1=k+1\ ,\ \ \lambda_2=-1\ ,\ \ \lambda_3=1.$$

Se $\lambda_1=k+1=\lambda_2=-1 \Rightarrow$ k=-2 (λ=-1 molteplicità alg. 2)

Se $\lambda_1=k+1=\lambda_3=1 \Rightarrow$ k=0 (λ=1 molteplicità alg. 2).

Per $k\neq-2 \wedge k\neq 0$ la matrice è sicuramente diagonalizzabile $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$ e m.alg.=m.geom=1.

Controlliamo **k=-2**:

$\rho(A_{-2}+I_3)=2$ dunque molt. geom. di $\lambda=-1$ è 1 mentre la molt.alg è 2.

Non diagonalizzabile.

Controlliamo **k=0**:

$\rho(A_0-I_3)=1$ dunque molt. geom. di $\lambda=1$ è 2 come la molt.alg.

Diagonalizzabile.

la matrice è diagonalizzabile se e solo se $k\neq-2$.

Riassumendo

- …

- …

- Per k=0 la matrice è diagonalizzabile e gli autovalori sono:

$\lambda_1=1$ m.a.=m.g.=2, $\lambda_2= -1$ m.a=m.g.=1.

Mentre gli autospazi sono:

$$V_1=\{(\alpha,\beta,\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \text{ di base } ((1,0,0),(0,1,1))$$

$$V_{-1}=\{(0,\alpha,0) \mid \alpha\in\mathbb{R}\} \text{ di base } ((0,1,0))$$

Le due matrici richieste sono: la matrice diagonale

$$A_0' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

e la matrice diagonalizzante

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini una base per $L\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\}^\perp$ dove $\mathbf{v_1}=(1,-1,1)$, $\mathbf{v_2}=(0,1,0)$ e il prodotto scalare è così definito:

$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2$ rispetto alla base canonica.

Svolgimento:

Attenzione il prodotto scalare non è euclideo.

Per la proprietà $L\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\}^\perp=\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\}^\perp$, il complemento ortogonale è costituito da tutti e soli i vettori (x,y,z) che hanno prodotto scalare con $\mathbf{v_1}=(1,-1,1)$ e con $\mathbf{v_2}=(0,1,0)$ nullo:

$$\begin{cases}(1,-1,1)\circ(x,y,z)=0\\(0,1,0)\circ(x,y,z)=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x-y+2z=0\\y=0\end{cases}$$

$L\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}\}^\perp = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2z=0 \wedge y=0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ di dimensione 1 con base ((-2,0,1)).

Esercizio 2

In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base per $L(A)^\perp$ dove $A = \{(1,0,-1,0),(0,1,0,0)\}$ e il prodotto scalare è così definito:

$$(x_1,y_1,z_1,t_1)\circ(x_2,y_2,z_2,t_2)=2x_1x_2+3y_1y_2+z_1z_2+2t_1t_2.$$

Svolgimento:

Attenzione il prodotto scalare non è euclideo.

Per la proprietà $L(A)^\perp=A^\perp$, il complemento ortogonale è costituito da tutti e soli i vettori (x,y,z,t) che hanno prodotto scalare con $\mathbf{v_1}$=(1,0,-1,0) e con $\mathbf{v_2}$ =(0,1,0,0) nullo:

$$\begin{cases} (1,0,-1,0)\circ(x,y,z,t)=0 \Leftrightarrow 2x-z=0 \\ (0,1,0,0)\circ(x,y,z,t)=0 \Leftrightarrow 3y=0 \end{cases}$$

$L(A)^\perp = \{(x,y,z,t)\in \in\mathbb{R}^4 \mid 2x-z=0 \wedge y=0 \}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ di dimensione 2 con base

((1,0,2,0),(0,0,01)).

Prodotti scalari definiti positivi

I prodotti scalari degli esercizi 1 e 2 sono definiti positivi: $\mathrm{v} \circ \mathrm{v} > 0, \qquad \forall \mathrm{v} \neq \vec{0}$

In tal caso è possibile considerare la **norma** dei vettori definita come : $\|\mathrm{v}\| = \sqrt{\mathrm{v} \circ \mathrm{v}}$

Due vettori v, w di $\mathbb{R}^n$ hanno la **stessa direzione** se v=λw con λ∈R.

Un vettore è detto **versore** se la sua norma è 1.

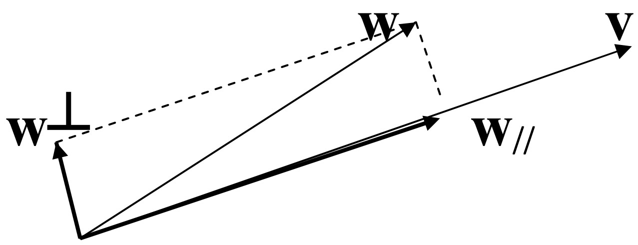
Rispetto ad un prodotto scalare definito positivo ∘ in V, spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, è sempre possibile scrivere un vettore **w** come somma di due vettori uno di L(**v**) e uno di $\{\mathbf{v}\}^{\perp}$con **v** vettore non nullo.

$$w = \frac{v \circ w}{v \circ v} v + \left(w - \frac{v \circ w}{v \circ v} v \right)$$

dove $\frac{v \circ w}{v \circ v}$ è il **<u>coefficiente di Fourier</u>** di **w** lungo la direzione di v,

$\frac{v \circ w}{v \circ v} v$ è **<u>la proiezione di w nella direzione di v</u>**,

$w - \frac{v \circ w}{v \circ v} v$ è un **<u>vettore ortogonale a v</u>.**



Esercizio 3

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ dati **w**=(3,-1,3) **v** =(0,1,1) e il prodotto scalare è così definito:

$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2$ rispetto alla base canonica, si determini la proiezione di **w** nella direzione di **v** e si scriva **w** come combinazione lineare di questo vettore e di uno ortogonale a **v**.

Svolgimento:

Attenzione il prodotto scalare non è euclideo.

Determino il coefficiente di Fourier:

$\mathbf{w} \circ \mathbf{v} = (3,-1,3) \circ (0,1,1) = 3.0 + (-1).1 + 2.3.1 = 5$

$\mathbf{v} \circ \mathbf{v} = (0,1,1) \circ (0,1,1) = 0.0 + 1.1 + 2.1.1 = 3$

dunque tale coefficiente è 5/3.

Allora

$$\mathbf{w} = 5/3(0,1,1) + ((3,-1,3) - 5/3(0,1,1))$$
$$= (0,5/3,5/3) + (3,-8/3,4/3)$$

Il vettore (0,5/3,5/3) è la proiezione di **w** nella direzione di **v**, mentre (3,-8/3,4/3) è ortogonale a **v** rispetto a questo prodotto scalare, infatti:

$(3,-8/3,4/3) \circ (0,1,1) = 3.0 + (-8/3).1 + 2.(4/3).1 = 0.$

Esercizio 4

In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dati i vettori **u**=(1,-1,1,0), **w** =(1,0,1,1) e il prodotto scalare è così definito:

$$(x_1,y_1,z_1,t_1)\circ(x_2,y_2,z_2,t_2)=2x_1x_2+3y_1y_2+z_1z_2+2t_1t_2.$$

Si determini la norma di **u**, la norma di **w**, la proiezione di **u** lungo **w** e si scrivano **u** e **w** come combinazione lineare di versori con la medesima direzione rispettivamente di **u** e **w**.

Svolgimento (attenzione al prodotto scalare):

La norma di **u** è la radice quadrata di:

$(1,-1,1,0)\circ(1,-1,1,0)=2.1.1+3.(-1).(-1)+1.1+2.0.0=6$

$$\|u\| = \sqrt{u \circ u} = \sqrt{6}$$

Analogamente, la norma di w è la radice quadrata di:

$(1,0,1,1)\circ(1,0,1,1)=2.1.1+3.0.0+1.1+2.1.1=5$

$$\|w\| = \sqrt{w \circ w} = \sqrt{5}$$

La proiezione di u lungo w è:

$$\frac{w \circ u}{w \circ w} w = \frac{3}{5}(1,0,1,1) = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Infine

$$u=\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0\right) \quad \text{e} \quad \mathrm{w}=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

dove i vettori

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0\right) \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

sono rispetto a questo prodotto scalare dei versori (la loro norma, rispetto a questo prodotto scalare, è 1).

Una base ($\mathbf{v_1},\ldots\mathbf{v_n}$) di $\mathbb{R}^n$ è **ortogonale** rispetto ad un prodotto scalare se e solo se $\mathbf{v_i}\circ\mathbf{v_j}=0$ per ogni i,j=1,…,n con i≠j.

Una base ($\mathbf{v_1},\ldots\mathbf{v_n}$) di $\mathbb{R}^n$ è **ortonormale** rispetto ad un prodotto scalare definito positivo se e solo è ortogonale e $\mathbf{v_i}\circ\mathbf{v_i}=1$ ogni i=1,…,n.

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:

Data una base $B_1=(\mathbf{v_1,\ldots v_n})$ di V, se ne costruisce una ortogonale rispetto ad un **prodotto scalare definito positivo** $B_2=(\mathbf{w_1,\ldots w_n})$ nel seguente modo:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \circ w_1}{w_1 \circ w_1} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \circ w_1}{w_1 \circ w_1} w_1 - \frac{v_3 \circ w_2}{w_2 \circ w_2} w_2$$

...

$$w_n = v_n - \sum_{i=1,..,n-1} \frac{v_n \circ w_i}{w_i \circ w_i} w_i$$

Ovviamente il metodo di Gram-Schmidt può essere usato anche per le basi dei sottospazi vettoriali.

Esercizio 5

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ dati B=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) e B′=((1,1,0),(0,1,0),(0,0,1))e il prodotto scalare è così definito:

$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2$ si costruisca a partire da B una base ortonormale rispetto a questo prodotto scalare.

Svolgimento

Rispetto a questo prodotto scalare i tre vettori sono ortogonali, infatti i prodotti scalari tra vettori diversi sono sempre nulli. Le norme dei tre vettori dati sono:

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{(1,0,0) \circ (1,0,0)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|(0,1,0)\| = \sqrt{(0,1,0) \circ (0,1,0)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|(0,0,1)\| = \sqrt{(0,0,1) \circ (0,0,1)} = \sqrt{2}$$

Dunque la nuova base è :

$$\left((1,0,0),(0,1,0),\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Per B′…