Esercizio (n.5 I prova intermedia 10-11-2008 fila 1)

Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 1 & k-1 & k+3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

al variare del parametro reale k si determinino:

a) i valori di k per i quali A_k ammette almeno due autovalori uguali;

b) i valori di k per i quali la matrice è diagonalizzabile;

c) posto k=0 si trovi una matrice diagonale simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante.

Il polinomio caratteristico è

$$(k-\lambda)(k-1-\lambda)(2-\lambda).$$

Gli autovalori sono quindi:

$$\lambda_1=k\ ,\quad \lambda_2=k-1\ ,\quad \lambda_3=2.$$

a) $\lambda_1=k=\lambda_2=k-1$ impossibile

$\lambda_1=k=\lambda_3=2 \Rightarrow k=2$ ($\lambda=2$ molteplicità alg. 2)

λ_2=k-1= λ_3=2 $\Rightarrow$ k=3 (λ=2 molteplicità alg. 2)

b) per $k \neq 2 \wedge k \neq 3$ la matrice è sicuramente diagonalizzabile.

Controlliamo **k=2**:

$\rho(A_2-2I_3)=2$ dunque molt. geom. di $\lambda=2$ è 1.

Non diagonalizzabile.

Controlliamo **k=3**:

$\rho(A_3-2I_3)=2$ dunque molt. geom. di $\lambda=2$ è 1.

Non diagonalizzabile.

la matrice è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 2 \wedge k \neq 3$.

c) Per k=0 la matrice è diagonalizzabile e gli autovalori sono:

$$\lambda_1=0\ ,\ \ \lambda_2= -1\ ,\ \ \lambda_3=2.$$

Mentre gli autospazi sono:

$$V_0=\{(\alpha,\alpha,0) \mid \alpha\in\mathbb{R}\} \text{ di base } ((1,1,0))$$

$$V_{-1}=\{(0,\alpha,0) \mid \alpha\in\mathbb{R}\} \text{ di base } ((0,1,0))$$

$$V_2=\{(0,\alpha,\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\} \text{ di base } ((0,1,1))$$

Le due matrici richieste sono: la matrice diagonale

$$A_0' = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

e la matrice diagonalizzante

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forme bilineari

Esercizio 1

Scrivere la matrice che rappresenta in $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto alla base canonica, la seguente forma bilineare:

$$(x_1,y_1,z_1)*(x_2,y_2,z_2)= 3x_1y_2,+ y_1y_2-5z_1y_2+y_1z_2; \ (\spadesuit)$$

Calcolare $(0,0,1)*(0,1,0)$ e $(2,-1,1)*(0,1,1)$.

La matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Infatti $(x_1,y_1,z_1)*(x_2,y_2,z_2)= 3x_1y_2+ y_1y_2-5z_1y_2+y_1z_2;$ equivale alla scrittura matriciale:

$$(x_1,y_1,z_1)\begin{pmatrix}0&3&0\\0&1&1\\0&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}.$$

$$(0,0,1)\begin{pmatrix}0&3&0\\0&1&1\\0&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-5 \qquad (2,-1,1)\begin{pmatrix}0&3&0\\0&1&1\\0&-5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=0+0-1=-1$$

oppure dalla (♠)

$(x_1,y_1,z_1)*(x_2,y_2,z_2)= 3x_1y_2,+ y_1y_2-5z_1y_2+y_1z_2 \ldots$

Esercizio 2

Scrivere la matrice che rappresenta in $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, rispetto alla base canonica, la forma bilineare con le seguenti caratteristiche:

$(1,0)*(1,0)=3$; $\qquad (1,0)*(0,1)= -1$;

$(0,1)*(1,0)=2 \quad$ e $\quad (0,1)*(0,1)=0$.

Calcolare $(1,2)*(-1,1)$.

La matrice associata è:

$$\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\end{pmatrix}$$

La forma bilineare $(x_1,y_1)*(x_2,y_2)= 3x_1x_2- x_1y_2+2y_1x_2$;

equivale alla scrittura matriciale:

$$(x_1, y_1)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$(1,2)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -7 - 1 = -8$$

oppure (1,2)*(-1,1) = 3.1.(-1) - 1.1 + 2.2.(-1) = -8.

Prodotto scalare

È una forma bilineare simmetrica.

In questo caso si preferisce usare il simbolo $\circ$.

Dunque una forma bilineare simmetrica ha la proprietà:

$\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=\mathbf{w}\circ\mathbf{v} \quad \forall\ \mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ e la matrice di rappresentazione è simmetrica.

Due vettori si dicono ortogonali se $\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=0$.

Dato un insieme $A\subseteq V$ non vuoto, definiamo $A^{\perp}$ **complemento ortogonale di A**:

$$A^{\perp} = \{\ \mathbf{v}\in V \mid \mathbf{v}\circ\mathbf{a}=0 \quad \forall\ \mathbf{a}\in A\ \}$$

Proprietà

1) $A^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V;

2) $A^{\perp} = (L(A))^{\perp}$;

3) $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

Esercizio 3

Data la seguente forma bilineare in $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, rispetto alla base canonica:

$$(x_1,y_1)\circ(x_2,y_2)=4x_1x_2- x_1y_2-y_1x_2$$

a) verificare che è simmetrica;

b) determinare se esistono vettori ortogonali a se stessi;

c) determinare il complemento ortogonale di $\{(3,2)\}$ rispetto a questo prodotto scalare.

Svolgimento

a) $\forall\ \mathbf{v},\mathbf{w}\in V$

$$\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=(x_1,y_1)\circ(x_2,y_2)=4x_1x_2- x_1y_2-y_1x_2=(x_2,y_2)\circ(x_1,y_1)= \mathbf{w}\circ\mathbf{v}$$

La matrice che rappresenta la forma bilineare è simmetrica

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) un vettore **v** è ortogonale a sé stesso se e solo se

v∘**v**=0 (x,y)∘(x,y)=4xx- xy-yx=2x(2x-y)

x=… ∨ y=…. quindi

v=(0,y) oppure **v**=(x,2x) con x,y∈ℝ;

c) $\{(3,2)\}^{\perp}=\{\mathbf{v}\in V \mid \mathbf{v}\circ\mathbf{(3,2)}=0\}$

$(x,y)\circ(3,2)=4x.3- x.2-y.3 \Rightarrow 10x-3y=0$

$\{(3,2)\}^{\perp}=\{(\ldots,\ldots) \mid x\in\mathbb{R}\}$

Esercizio 4

Dato il seguente prodotto scalare in $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, rispetto alla base canonica:

$$(x_1,y_1)\circ(x_2,y_2)=2x_1x_2- x_1y_2-y_1x_2+ y_1y_2$$

determinare il complemento ortogonale di $W=\{(x,2x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.

Utilizziamo la proprietà 2) riportata a pag.6

W=L((1,2)) determiniamo il complemento ortogonale di ((1,2)): $(\alpha,\beta)\in W^{\perp}$ se e solo se

$$(\alpha,\beta)\circ(1,2)=2\alpha.1-\alpha.2-\beta.1+\beta.2=\mathbf{0}$$

$$\beta=0$$

$W^{\perp}=\{(\ldots,0)\,|\,\ldots\in\mathbb{R}\}$ s.s.v. di dim…..

In alternativa usando la definizione di compl. ortogonale

$$(\alpha,\beta)\circ(x,2x)=0 \quad \underline{\forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}}$$

$$2\alpha.x-\alpha.2x-\beta.x+\beta.2x=0$$

$$\beta x=0 \Rightarrow \beta=0.$$

Esercizio 5

Si determini, se esiste, il valore reale di k affinché il vettore (k, 1, 2-k, 0) di $\mathbb{R}^4$ appartenga ad $A^{\perp}$ dove A= {(1,-2,1,0) , (0,3,1,0)} e il prodotto scalare è definito componente per componente.

Il vettore (k, 1, 2-k, 0) appartiene ad $A^{\perp}$ se e solo se il prodotto scalare euclideo con entrambi i vettori di A dà per risultato 0.

$$(k, 1, 2-k, 0)\circ(1,-2,1,0)=0 \quad \text{e}$$

$$(k, 1, 2-k, 0)\circ(0,3,1,0)=0$$

Per come è definito tale prodotto scalare devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} k.1+1.(-2)+(2-k).1+0.0=0 \\ k.0+1.3+(2-k).1+0.0=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ..=.. \\ k=... \end{cases}$$

k=….

Esercizi da svolgere

a) Si determini, se esiste, il valore reale di k affinché il vettore (k, 0, 2-k) di $\mathbb{R}^3$ appartenga ad $A^\perp$ dove A= {(1,-2,-1) , (0,3,0)} e il prodotto scalare è definito componente per componente rispetto alla base canonica.

b) Si determini per quale valore di k il vettore (1,k-2,0,4) di $\mathbb{R}^4$ appartiene al complemento ortogonale di A = {(- 4, 0, 0, 1) , (1, 1, 2, 0)} rispetto al prodotto scalare definito componente per componente rispetto alla base canonica.

Esercizio 6

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini una base per $\{v\}^\perp$ dove v=(1,0,2) e il prodotto scalare è così definito:

$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2$ rispetto alla base canonica.

Per definizione di complemento ortogonale $\{v\}^\perp$ è costituito da tutti e soli i vettori (x,y,z) che hanno prodotto scalare con v=(1,0,2) nullo:

$$(x,y,z) \circ (1,0,2) = 0$$

$$1.y + x.0 - 2.2.z = 0$$

$\{v\}^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ \ldots\ldots\ldots = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ di dimensione 2 con base ((..,..,..),(..,..,..)).

Esercizi da svolgere:

a) In $R^3(R)$ si determini una base per $A^\perp$ dove A = L((0,1,-1),(1,0,2)) e il prodotto scalare è così definito: $(x_1,y_1,z_1) \circ (x_2,y_2,z_2) = x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2$.

b) In $R^4(R)$ si determini una base per $A^\perp$ dove

A = {(1,0,-1,0),(0,1,0,0)} e il prodotto scalare è così definito:

$$(x_1,y_1,z_1,t_1) \circ (x_2,y_2,z_2,t_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+ t_1t_2 \quad .$$

Esercizio 7 (particolare)

Dati $M_2(\mathbb{R})$ e il prodotto scalare tra matrici definito nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + 2x_2 \cdot y_2 + x_4 \cdot y_4$$

a) determinare il complemento ortogonale di

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4 \in R \right\}$$

rispetto a questo prodotto scalare;

b) esistono vettori ortogonali a se stessi?

Trovo una base per W:

$$B=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ricordo che $A^{\perp}=L(A)^{\perp}$ quindi:

$$B^{\perp}=L(B)^{\perp}=W^{\perp}$$

a) Allora il complemento ortogonale di B è costituito da tutte le matrici $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ che hanno prodotto scalare nullo con tutte le matrici di B:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot 1 + 2x_2 \cdot 0 + x_4 \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}_1 = 0 \quad \wedge$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot 0 + 2x_2 \cdot 0 + x_4 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}_4 = 0$$

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \ldots \\ \ldots & 0 \end{pmatrix} \middle| \ldots,\ldots \in R \right\}$$

b) Esistono vettori di questo spazio vettoriale, ossia matrici, ortogonali a se stessi rispetto a questo prodotto scalare:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_1 + 2x_2 \cdot x_2 + x_4 \cdot x_4$$

$$x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} + x_4^{\ 2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ldots = \ldots = \ldots = 0 \quad \underline{\textbf{in } \mathbb{R}}$$

Sono le matrici che appartengono al seguente sottospazio vettoriale:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \mid \ldots \in R \right\}.$$

Prodotto scalare definito positivo

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{v} > 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in V - \{\mathbf{0}\}$$

Proprietà del complemento ortogonale

4) $(A^{\perp})^{\perp} = L(A)$;

5) $V = A^{\perp} \oplus L(A)$.

Esercizio 8

Sia $V=\{(x,y,z) \mid x+y-2z=0\}$, sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, si determini una base di V costituita da vettori ortogonali rispetto al prodotto scalare euclideo.

I vettori di V sono del tipo $(x,2z-x,z)$.

Un primo vettore della base può essere $\mathbf{v}=(1,-1,0)$. Ricerchiamo un secondo vettore di V (linearmente indipendente da v) ortogonale a v:

$$(x,2z-x,z) \circ (1,-1,0) = 0$$

$$x-2z+x=0 \Rightarrow \ldots..$$

Un secondo vettore di V ortogonale a **v** può essere **w**=(…,…,…).

Una base ortogonale di V è ((.,.,.),(.,.,.)).

Esercizio 9 completiamo la soluzione dei quesiti residui della I prova intermedia 10-11-2008 fila 1

...

Esercizio 10 (di riepilogo)

Si considerino :

V={(x,y,z,t)| x+y+z+t=0, x+y=0 , x+z=0 x,y,z,t$\in\mathbb{R}$ } sottospazio vettoriale, A={(-1,1,z,t)| z, t$\in\mathbb{R}$} sottoinsieme di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ nel quale è definito il prodotto scalare euclideo. Si determinino:

a) una base e la dimensione di V;

b) una base ortogonale e la dimensione di L(A);

c) una base e la dimensione del complemento ortogonale di V ;

d) una base e dimensione di V+L(A), una base e dimensione di V$\cap$L(A);

e) una base e la dimensione di un complemento diretto di V.

a) i vettori di V devono soddisfare le equazioni caratteristiche $x+y+z+t=0$, $x+y=0$, $x+z=0$ che risolte in sistema portano a individuare le quaterne: (x, -x,-x, x). V è dunque sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ generato da per esempio da (1,-1,-1,1). Base è ((1,-1,-1,1)) e dimV=1.

b) La copertura lineare di A={(-1, 1, z, t)} è L(A)={(-a, a, z, t)}, generata dai vettori (1,-1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) che risultano linearmente indipendenti perché:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3;

Dunque una base è ((1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)) e dim L(A)=3.

Tale base è costituita da vettori a due a due ortogonali tra di loro rispetto al prodotto scalare definito componente per componente: base ortogonale.

c) Il complemento ortogonale di V è il complemento ortogonale di una base di V: cerchiamo tutti i vettori ortogonali a (1,-1,-1,1).

$$(x,y,z,t)\circ(1,-1,-1,1)=0$$

$$x-y-z+t=0$$

sono tutte e sole le quaterne del tipo

$$(y+z-t,y,z,t) \text{ al variare di } y,z,t \text{ in } \mathbb{R}.$$

$$V^{\perp}=\{(y+z-t,y,z,t)|y,z,t\in\mathbb{R}\}$$

Tale sottospazio vettoriale è generato dai vettori (1,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1) linearmente indipendenti perché:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ha rango 3.}$$

Dunque una base è ((1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)) e dim $V^{\perp}=3$.

d) V+L(A) è generato da:

(1,-1,-1,1) e (1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1). Verifichiamo se tali vettori sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango di tale matrice non è 4 perché il determinante risulta nullo (I riga = -II riga). Il rango è sicuramente 3 perché la matrice contiene i tre vettori della base di L(A).

$\boxed{V+L(A)=L(A)}$, dim [V+L(A)]=3; una base richiesta è una base di L(A).

Dunque $\boxed{V \cap L(A) = V}$, dim $[V \cap L(A)] = 1$ e una base richiesta è una base di V.

e) Utilizzando, per esempio, i primi tre vettori della base canonica verifico che, insieme al vettore (1,-1,-1,1), costituiscano una sequenza libera; a tal fine costruisco la matrice delle componenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango pieno perché il determinante è non nullo.

Un complemento diretto ha per base:

((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)) ed ha dimensione 3.