Esercizio 1 (es 1 lez 11)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice è diagonalizzabile: verificare, trovando la matrice diagonalizzante, che A è simile a A′.

Esistono tre autovalori:

molt.alg(-2)= 1= dim $\mathbf{V}_{-2}$;

molt.alg(2)= 1= dim $\mathbf{V}_{2}$;

molt.alg(-1)= 1= dim $\mathbf{V}_{-1}$.

Esiste una matrice simile

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(R)$$

Una base che consente di trovare matrice A′ simile ad A diagonale può essere: B=((0,0,1),(1,3,-1/2),(1,0,1))

La matrice diagonalizzante è:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(R)$$

La sua matrice inversa:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(R)$$

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Determinare gli autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(R)$$

$$\det(A-\lambda I_4)=0$$

$$A-\lambda I_4=\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\in \mathrm{M}_4(R)$$

$$\det(A-\lambda I_4)=\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -\lambda+\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -3+\lambda(2-\lambda) & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-(-\lambda^2+2\lambda-3)\left[(1-\lambda)^2-1\right]$$

$\det(A-\lambda I_4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2-2\lambda+3)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)=0$

$\lambda_1=0$ con molteplicità algebrica 1;

$\lambda_2=2$ con molteplicità algebrica 1.

Gli autospazi associati avranno ciascuno dimensione 1.

La matrice non è diagonalizzabile.

Esercizio 3

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -3/2 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(R)$$

Data la matrice A:

a) determinare gli autovalori di A;

b) determinare gli autospazi associati, relative dimensioni e base;

c) verificare che la matrice A è diagonalizzabile;

d) determinare una matrice diagonalizzante P tale $A' = P^{-1}AP$ con A' matrice diagonale.

traccia

$\det(A-\lambda I_3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=0$ o $\lambda=3$ (molt.alg.2)

dim $\mathbf{V}_0=1$ e una base è ((-2,1,2))

dim $\mathbf{V}_3=2$ e una base è ((-2,0,1),(0,1,0)).

A è diagonalizzabile

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\dots$

Esercizio 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

Data la matrice A:

a) determinare gli autovalori di A;

b) determinare gli autospazi associati, relative dimensioni e base;

c) verificare che la matrice A è diagonalizzabile;

d) determinare una matrice diagonalizzante P tale

$$A' = P^{-1}AP.$$

$$A-\lambda I_4=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\in M_4(R)$$

Il determinante di quest'ultima matrice è

$$(2-\lambda)(-3-\lambda)(-1-\lambda)\ (2-\lambda)$$

a) Gli autovalori reali sono dunque:

$\lambda_1=2$ con molteplicità algebrica 2;

$\lambda_2=-3$ con molteplicità algebrica 1;

$\lambda_3=-1$ con molteplicità algebrica 1.

b)Gli autospazi relativi sono:

b1) ricerchiamo $(A-2I_4)X=0$

$$A-2I_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2 ed un sistema principale equivalente estratto è:

$$\begin{cases} 3z = 0 \\ -5y = 0 \end{cases} \qquad S = ((x,0,0,t) \mid x,t \in R)$$

Quest'insieme di soluzioni è $\mathbf{V}_2$ autospazio associato a λ=2. $\boxed{\text{dim } \mathbf{V}_2\text{=2 e una base è ((1,0,0,0),(0,0,0,1)).}}$

b2) ricerchiamo $(A+I_4)X=0$

$$A + I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 3 ed un sistema principale equivalente estratto è:

$$\begin{cases} 3x + 3z = 0 \\ -2y = 0 \\ 5y + 3t = 0 \end{cases} \qquad S = ((-z,0,z,0) \mid z \in R)$$

Quest'insieme di soluzioni è $\mathbf{V}_{-1}$ autospazio associato a λ=-1. $\boxed{\text{dim } \mathbf{V}_{-1}\text{=1 e una base è ((-1,0,1,0)).}}$

b3) ricerchiamo $(A+3I_4)X=0$

$$A+3I_4=\begin{pmatrix}5&0&3&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&5&0&5\end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 3 ed un sistema principale equivalente estratto è:

$$\begin{cases}5x+3z=0\\2z=0\\5y+5t=0\end{cases}\qquad S=((0,-t,0,t)\,|\,t\in R)$$

Quest'insieme di soluzioni è $\mathbf{V}_{-3}$ autospazio associato a λ=-3. $\boxed{\text{dim } \mathbf{V}_{-3}=1 \text{ e una base è } ((0,1,0,-1)).}$

c) la matrice A possiede 4 autovalori, non distinti (contati con la rispettiva molteplicità), ciascuno degli autovalori trovati ha la molteplicità geometrica coincidente con la molteplicità geometrica:

λ=2 molteplicità algebrica=2. dim $\mathbf{V}_2$=2

λ=-3 molteplicità algebrica=1.dim $\mathbf{V}_{-3}$=1

λ=-1 molteplicità algebrica=1.dim $\mathbf{V}_{-1}$=1.

A è diagonalizzabile

d) Esiste quindi una base di autovettori di A tramite i quali la rappresentazione diventa A'. Per esempio:

B=((1,0,0,0),(0,0,0,1),(-1,0,1,0),(0,1,0,-1)).

La matrice P diagonalizzante è:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Da cui A'=P^{-1}AP

$$A'=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

Esercizio 5

Per quali valori del parametro reale h la seguente matrice è diagonalizzabile?

$$\begin{pmatrix}3h & 0\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

La matrice è sicuramente diagonalizzabile se gli autovalori λ_1=3h e λ_2=5 risultano distinti: $\boxed{h \neq 5/3}$. In questo caso i singoli autospazi risultano avere dim=1, pari alla molteplicità algebrica.

Per h=5/3 determiniamo la dimensione dell'autospazio associato a λ_1= λ_2=5:

…

Esercizio 6

Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & k & 3 \end{pmatrix}$$

a) Si indichi per quali valori di k il sistema

$$A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$$

è compatibile e in tal caso quante soluzioni ammette;

b) si studino al variare del parametro reale k gli autovalori e la molteplicità algebrica;
c) si individuino i valori del parametro k affinché la matrice risulti diagonalizzabile;
d) posto k= - 3 si scriva la matrice diagonale simile e la matrice diagonalizzante.

Svolgiamolo insieme…