Esercizio 1

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 3x + (k+3)y + 2z = 1 \\ kx + y + z = 0 \\ ky + kz = k \end{cases} \qquad k \in R$$

a) studiare il rango della matrice incompleta del sistema;

b) studiare il rango della matrice completa del sistema;

c) discutere la compatibilità del sistema;

d) per k=0 determinare le soluzioni del sistema S, una base e dimensione della copertura lineare di S: L(S).

a) La matrice del coefficienti delle incognite è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k+3 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$$

e il suo determinante è $-k^2(k+1)$. Per **k≠… e k≠ …, il rango è 3.**

Per **k=…** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **e k= …** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **il rango è … .**

$k \neq 0 \wedge k \neq -1 \quad \rho(A)=\ldots, \qquad k=0 \vee k=-1 \quad \rho(A)=\ldots$

Risoluzione punto b)

La matrice completa del sistema è:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & k+3 & 2 & 1 \\ k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & k & \mathrm{k} \end{array}\right)$$

Per **k≠0 e k≠ - 1, il rango è 3**.

Per **k=0** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **ha rango 2**.

Per **k= - 1** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$ **ha rango 3**.

k≠0 ρ(A | B)=3, k=0 ρ(A | B)=2

Risoluzione punto c)

Discussione del sistema: per il teorema di Rouchè-Capelli

per k≠-1 e k≠0 il sistema dato ha ……………………;

per k=0 il sistema dato ha ……………………………;

per k= -1 il sistema dato è …………………...

Risoluzione punto d)

Per k=0

$$\begin{cases} 3x+3y+2z=1 \\ y+z=0 \end{cases} \quad \text{ponendo } z=\alpha \quad \begin{cases} x=\frac{1}{3}(1+\alpha) \\ y=-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

S={(………,….,….)|α∈ℝ}.

Questo è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^3$ ma non è sottospazio vettoriale.

La sua copertura lineare è:

L(S)={(……..,….,….)|α,β∈ℝ}.

Una base è costituita dai vettori **((1/3, -1,1),(1/3,0,0))** e **dim L(S)=2**.

Esercizio 2

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 6x_1+(k-1)x_2+12x_3=0 \\ 4x_1+2x_2+8x_3=7 \end{cases} \qquad k\in R$$

1) discuterne la compatibilità;

2) risolverlo quando possibile.

Svolgimento:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & k-1 & 12 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 7 \end{array}\right)$$

Il rango della matrice incompleta è **2 se k≠….;**

1 se k=…..

Il rango della matrice completa è **2 per ogni k**.

Il sistema è compatibile se e solo se k≠…..

Il sistema ammette in tal caso $\infty^{3-2}=\infty^{1}$ soluzioni.

Ponendo $x_3=\alpha$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} 6x_1+(k-1)x_2=-12\alpha \\ 4x_1+2x_2=-8\alpha+7 \end{cases} \qquad k\in R$$

dove le incognite principali sono x_1 e x_2.

Risolvendolo con il metodo di Cramer:

$$|A|=16-4k$$

$$|A_{x_1}|=\begin{vmatrix} -12\alpha & k-1 \\ -8\alpha+7 & 2 \end{vmatrix}=-24\alpha+8\alpha k-7k-8\alpha+7$$

$$|A_{x_2}|=\begin{vmatrix} 6 & -12\alpha \\ 4 & -8\alpha+7 \end{vmatrix}=-48\alpha+42+48\alpha=42$$

Determiniamo le soluzioni:

per ogni valore di k≠….

$$S=\left\{\left(\frac{8\alpha k-7k+7-32\alpha}{16-4k},\frac{42}{16-4k},\alpha\right)\middle|\alpha\in R\right\}$$

Esercizi da risolvere

1) Dato il sistema:

$$\begin{cases} 2x+kz=2 \\ x+y+2z=0 \\ 3x+y+3z=2 \end{cases},\quad k\in R$$

discutere la compatibilità e risolverlo, al variare del parametro k, quando possibile.

2) I prova intermedia **2008**:

esercizio 1, 2 (solo punto b), 3 e 4.

I prova intermedia **2007**:

esercizio 1 (punti a, b, c, d), 2 e 3.

I prova intermedia **2005**: esercizi 1, 2 e 3.

DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE

1) Autovalori e autovettori

Data una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{M_n(R)}$$

diremo che **$\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore** di A se esistono $X \in \mathbb{R}^{n,1}$, $X \neq \underline{\mathbf{0}}$ tali che

$$AX = \lambda X.$$

X rappresenta la **matrice delle componenti degli autovettori**.

L'insieme degli autovettori con $\underline{\mathbf{0}}$ costituisce un sottospazio vettoriale (autospazio): $\mathbf{V}_\lambda$.

Affinché esistano delle soluzioni X tali che $AX=\lambda X$, il sistema $(A-\lambda I_n)X=0_n$ (sistema lineare omogeneo) deve ammettere soluzioni non banali. Ciò accade se e solo se

$$\boxed{\textbf{det}\,(A-\lambda I_n)=0}$$

Esercizio 1

Data la matrice

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\in M_3(R)$$

a) determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche;

b) determinare gli autospazi relativi agli autovalori determinati al punto a).

a) AX= λX ha soluzioni non banali se e solo se

$$\det(A-\lambda I_3)=0$$

$$\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 1 & -1 & -2-\lambda\end{pmatrix}=(-2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

allora gli autovalori sono:

λ_1=… con molteplicità algebrica 1;

λ_2=… con molteplicità algebrica 1;

λ_3=… con molteplicità algebrica 1.

b) determinare gli autospazi relativi significa trovare i vettori rappresentati da X in generale non nulli tali che

$$AX=\lambda X$$

b_1) $AX= \ldots X \iff (A+\ldots I_3)X=\underline{\mathbf{0}}$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 4y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{V}_{-2}=\{(0,0,\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\} \text{ e } \dim \mathbf{V}_{-2}=1}$

b_2) $AX= \ldots X \iff (A- \ldots I_3)X=\underline{\mathbf{0}}$

$$\begin{cases} -3x+y=0 \\ 0=0 \\ x-y-4z=0 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{V}_{2}=\{(\alpha,3\alpha,-\alpha/2)|\alpha\in\mathbb{R}\} \text{ e } \dim \mathbf{V}_{2}=1}$

b_3) $AX= \ldots X \iff (A+I_3)X=\underline{\mathbf{0}}$

$$\begin{cases} y=0 \\ 3y=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{V}_{-1}=\{(\alpha,0,\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\} \text{ e } \dim \mathbf{V}_{-1}=1}$

Esercizio 2

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

a) determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche;

b) determinare gli autospazi relativi agli autovalori determinati al punto a).

a) AX= λX ha soluzioni non banali se e solo se

$$\det(A- \lambda I_3)=0$$

$$\det(A-\lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

allora gli autovalori sono:

λ_1=… con molteplicità algebrica 1;

λ_2=… con molteplicità algebrica 2.

b) determinare gli autospazi relativi significa trovare i vettori rappresentati da X non banali tali che

b_1) AX= 2X $\Leftrightarrow$ $(A-2I_3)X=\underline{\mathbf{0}}$

$$\begin{cases} -3x+z=0 \\ 3x+z=0 \\ -3z=0 \end{cases}$$

$\mathbf{V}_2=\{(0,\alpha,0)|\alpha\in\mathbb{R}\}$ e dim $\mathbf{V}_2=1$

b_2) AX= -1X $\Leftrightarrow$ $(A+I_3)X=\underline{\mathbf{0}}$

$$\begin{cases} z=0 \\ 3x+3y+z=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$\mathbf{V}_{-1}=\{(\alpha,-\alpha,0)|\alpha\in\mathbb{R}\}$ e dim $\mathbf{V}_{-1}=1$

Esercizio 3

Per quali valori del parametro reale h la matrice assegnata ammette un autovalore uguale a 0?

$$\begin{pmatrix} h+1 & 2 & 2h \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h+1 & 2 & 2h \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{con} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tali soluzioni esistono se e solo se il determinante della matrice assegnata risulta nullo: …..=0 $\Rightarrow$ h=…..

Esercizio 4

In $V(\mathbb{R})$ rispetto alla base $B=(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$, per quali valori del parametro reale a la matrice assegnata ammette come autovettore $\mathbf{v}= \mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}$?

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Svolgimento

Devono esistere $a, \lambda \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cioè

$$\begin{cases} 3 + a = \lambda \\ -1 = \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} a = ... \\ \lambda = ... \end{cases} \qquad \boxed{a=\ldots}$$

Attenzione: se la richiesta fosse stata per quali valori del parametro reale **a** $\mathbf{w}= \mathbf{e_1}$ è autovettore, la risposta sarebbe stata mai.

Infatti le componenti del vettore w sono (1,0):

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 = \lambda \\ -1 = 0 \end{cases} \qquad \textit{impossibile}$$

2) Diagonalizzazione

Teorema

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ a coefficienti reali è **diagonalizzabile** se e solo se:

a) $\det(A- \lambda I_n)=0$ ammette n soluzioni reali λ_i (contate con la molteplicità algebrica) e

b) la molteplicità algebrica di ciascun λ_i uguaglia la dimensione dell'autospazio associato.

Riprendiamo gli esercizi svolti:

Esercizio 1

La matrice è diagonalizzabile: esiste una matrice simile

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

molt.alg(-2)= 1= dim $\mathbf{V}_{-2}$; molt.alg(2)= 1= dim $\mathbf{V}_{2}$; molt.alg(-1)= 1= dim $\mathbf{V}_{-1}$.

Esercizio 2

La matrice A non è diagonalizzabile.

molt.alg(2)= 1= dim $\mathbf{V}_2$;

molt.alg(-1)=2   mentre dim $\mathbf{V}_{-1}$ =1.

Esercizi da svolgere

1) Come esercizio 1 con

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(R)$$

2) Determinare gli autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(R)$$

3) Per quali valori del parametri reale k la matrice assegnata ammette per autovalore λ=1?

$$A = \begin{pmatrix} k & 1\text{-}\mathrm{k} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4) I prova intermedia 2008: esercizio 5 punti a) e b).