Esercizio 1 (sistema omogeneo)

Discutere al variare del parametro k reale il sistema:

$$\begin{cases} kx_1 + kx_2 + 2kx_3 + kx_4 = 0 \\ kx_1 + (k-1)x_3 + kx_4 = 0 \\ kx_2 + (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$$

e risolverlo per k=2.

n=4 , m=3

La matrice incompleta del sistema è:

$$\begin{pmatrix} k & k & 2k & k \\ k & 0 & k-1 & k \\ 0 & k & k+2 & 0 \end{pmatrix}$$ ha rango 3 se e solo se

il determinante del minore estratto togliendo la quarta colonna (identica alla prima) è diverso da 0.

$$\begin{vmatrix} k & k & 2k \\ k & 0 & k-1 \\ 0 & k & k+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k & k+1 \\ k & 0 & k-1 \\ 0 & k & k+2 \end{vmatrix} = -k\begin{vmatrix} k & k+1 \\ k & k+2 \end{vmatrix} = -k^2\begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ 1 & k+2 \end{vmatrix} = -k^2(k+2-k-1) = -k^2$$

Per k≠0 il rango è **3=r**. Per k=0 il rango è **1=r**. Dunque:

1) per **k≠0** il sistema ha $\infty^{n-r}=\infty^{4-3}=\infty^{1}$ soluzioni (dipendenti da un parametro);

2) per **k=0** il sistema ha $\infty^{n-r}=\infty^{4-1}=\infty^{3}$ soluzioni (dipendenti da 3 parametri).

Per **k=2** il sistema diventa:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+x_3+2x_4=0 \\ 2x_2+4x_3=0 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_3+2x_4=0 \\ x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

risolvendolo si ottiene:

$$\begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$ ponendo $x_4=\alpha$

$$\boxed{S=\{(-\alpha,0,0,\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}}$$

Osservazione 4

a) Le soluzioni di un sistema lineare **<u>omogeneo</u>** **<u>costituiscono un sottospazio vettoriale</u>** di $\mathbb{R}^n$:

$$S = L(S).$$

b) Le soluzioni di un sistema lineare **<u>non omogeneo</u>** **<u>non costituiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^n$</u>** ; si potrà costruire la copertura lineare dell'insieme delle soluzioni S e

$$S \subset L(S).$$

Osservazione 5

Dato un sistema lineare non omogeneo compatibile, le sue soluzioni possono essere ottenute **sommando alle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato una soluzione particolare del non omogeneo**.

Esercizio 2 (sistema lineare non omogeneo)

Discutere e risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema è: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ed ha rango 3.

Mentre la matrice completa del sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

ed ha rango 4. **Sistema incompatibile**.

Esercizio 3 (sistema lineare non omogeneo)

Discutere e risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema è: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ed ha rango 3. La matrice completa del sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

ed ha rango 3 perché il suo determinante è nullo(verifica).

Per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ammette soluzioni. Poiché il numero delle incognite coincide con il rango otterremo una sola soluzione.

Estraggo un sistema principale equivalente:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Questo è un sistema di Cramer e può essere risolto con il metodo di Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$ determinante della matrice dei coefficienti di x_i

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |A_{x_3}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e la soluzione è:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_{x_1}|}{|A|} \\ x_2 = \dfrac{|A_{x_2}|}{|A|} \\ x_3 = \dfrac{|A_{x_3}|}{|A|} \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{1} \\ x_2 = \dfrac{1}{1} \\ x_3 = \dfrac{0}{1} \end{cases}. \quad \mathbf{S=\{(2,1,0)\}}.$$

S **non è sottospazio vettoriale** di $\mathbb{R}^3$.

Nel caso di sistemi compatibili si può sempre usare il metodo di Cramer a patto che si isolino le incognite principali da quelle che fungeranno da parametri nel sistema principale equivalente scelto.

Esercizio 4 (sistema lineare non omogeneo)

Discutere e risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema è: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ed ha rango 2 (perché il det. è nullo e $|A_{3,3}| \neq 0$). La matrice completa del sistema è: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)$

((IV)colonna = 2 (I)colonna+2(II)colonna)

e continua ad avere rango 2 perché entrambi i minori di ordine 3 che orlano $A_{3,3}$ hanno determinante nullo (thm. degli orlati).

Il sistema avrà $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Un sistema principale equivalente è:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 5x_3 \\ x_1 - x_2 = -x_3 \end{cases} \quad \text{ponendo} \quad x_3 = \alpha \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 5\alpha \\ x_1 - x_2 = -\alpha \end{cases}$$

dove le incognite principali sono x_1 e x_2.

Posso risolvere il sistema con qualsiasi metodo, ma visto che in quest'ultima versione è un sistema di Cramer, calcolo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 4-5\alpha & 1 \\ -\alpha & -1 \end{vmatrix} = -4+5\alpha+\alpha = 6\alpha-4$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 4-5\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha-4+5\alpha = 4\alpha-4$$

Da cui:

$x_1 = (6\alpha-4)/(-2) = 2-3\alpha$, $x_2 = (4\alpha-4)/(-2) = 2-2\alpha$, $x_3 = \alpha$

ossia **$S=\{(\ldots,\ldots,\ldots)\ |\alpha\in\mathbb{R}\}$.**

S non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5 (sistema lineare non omogeneo)

Discutere e risolvere, quando possibile, il sistema:

$$\begin{cases} y + hz = 1 - h \\ 2x + (h-3)y + 4z = h + 1 \\ x + hy - hz = 1 \end{cases} \qquad \text{h} \in \text{R}$$

La matrice incompleta del sistema è: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 2 & h-3 & 4 \\ 1 & h & -h \end{pmatrix}$

Il rango di tale matrice è 3 se e solo se il determinante (h+4)(h+1) è diverso da 0.

- Per **h≠ … e h≠ …** ovviamente la matrice completa avrà anch'essa **rango 3**, dunque il sistema risulterà di Cramer e avrà **una sola soluzione**.
- Per **h=…** il rango della matrice incompleta è 2.

  La matrice completa del sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right)$$ ed ha rango 3.

Sistema incompatibile.

- Per **h=…** il rango della matrice incompleta è 2.

  La matrice completa del sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ ed ha rango 3.

Sistema incompatibile.

Per **h≠ … e h≠ …** calcoliamo la soluzione con il metodo di Cramer:

$$|Ax| = \begin{vmatrix} 1-h & 1 & h \\ h+1 & h-3 & 4 \\ 1 & h & -h \end{vmatrix} = (h+1)(2h^2 - h + 4)$$

$$|Ay| = \begin{vmatrix} 0 & 1-h & h \\ 2 & h+1 & 4 \\ 1 & 1 & -h \end{vmatrix} = (1-h)(3h+4)$$

$$|Az| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-h \\ 2 & h-3 & h+1 \\ 1 & h & 1 \end{vmatrix} = (1-h)(h+2)$$

Dunque la soluzione è:

$$x = \frac{|Ax|}{|A|} = \frac{(h+1)(2h^2-h+4)}{(h+4)(h+1)} = \frac{(2h^2-h+4)}{(h+4)}$$

$$y = \frac{|Ay|}{|A|} = \frac{(1-h)(3h+4)}{(h+4)(h+1)}$$

$$z = \frac{|Az|}{|A|} = \frac{(1-h)(h+2)}{(h+4)(h+1)}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{(2h^2-h+4)}{(h+4)}, \frac{(1-h)(3h+4)}{(h+4)(h+1)}, \frac{(1-h)(h+2)}{(h+4)(h+1)} \right) \middle| h \in \mathrm{R} \right\}$$

Esercizio 6 (sistema lineare non omogeneo)

Dato il sistema:

$$\begin{cases} x = 2 + a \\ -x + (a+1)y + (a+1)z = -1 \quad a \in \mathrm{R} \\ 2x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro a:

a) discutere e risolvere il sistema omogeneo associato;

b) discutere l'esistenza delle soluzioni del sistema non omogeneo dato;

c) risolvere il sistema per a=-1.

Risoluzione punto a)

La matrice incompleta del sistema è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$.

Il determinante è (a+1)(a-2) e risulta diverso da 0 se **a≠… e a≠….**

In tale caso il rango della matrice è 3 e il sistema omogeneo ammette solo una soluzione cioè quella banale: **S={(..,..,..)}.**

Per a=… la matrice diventa:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ di rango 2. Il sistema omogeneo associato avrà dunque ∞^1 soluzioni. Estraggo un sistema principale equivalente dal sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{ponendo } y = \alpha \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

S={(…,…,…)|α∈ℝ }.

Per a=… la matrice diventa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ di rango 2. Il sistema omogeneo associato avrà dunque ∞^1 soluzioni. Estraggo un sistema principale equivalente dal sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{ponendo y} = \alpha \quad \begin{cases} \text{x} = 0 \\ \text{y} = \alpha \\ \text{z} = \text{-}\alpha \end{cases}$$

S={(…,…,…) |α∈ℝ }.

Risoluzione punto b)

Studiamo ora la matrice completa del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2+a \\ -1 & a+1 & a+1 & -1 \\ 2 & 2 & a & 1 \end{array}\right)$$

Poiché il rango massimo di questa matrice è 3 è chiaro che per **a≠… e a≠… il rango di A|B è 3**.

Per **a=…**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$ ha **rango 2** **(2 righe linearmente indipendenti)**.

Per **a=…**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ ha **rango 3**.

Discussione del sistema:

per il teorema di Rouchè-Capelli

per a≠… e a≠… il sistema dato avrà una sola soluzione;

per a= … il sistema dato avrà ∞^1 soluzioni;

per a=… il sistema dato non avrà soluzione.

Risoluzione punto c)

Per a=-1 il sistema diventa:

$$\begin{cases} x = 1 \\ -x = -1 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$$ e usando l'osservazione 5 si ricava immediatamente che una soluzione particolare è (1,0,1). Le soluzioni del sistema sono tutte e sole quelle ottenute sommando alle soluzioni del sistema

lineare omogeneo associato (vedi a) una soluzione particolare del non omogeneo

S={(1,…,….)|α∈ℝ}.

Esercizi da svolgere

1) Si determini per quali valori reali di a il seguente sistema ammette delle soluzioni reali:

$$\begin{cases} (\mathrm{a}-1)\,\mathrm{x} + \mathrm{y}+\mathrm{z}=1 \\ 2x+2y+2z=3 \end{cases} \qquad a\in \mathrm{R}$$

2) Discutere la compatibilità dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} hx+y=0 \\ x+(h-1)y=0 \\ 3x+2hy=0 \end{cases} \quad \mathrm{h}\in\mathrm{R} \qquad \begin{cases} (\mathrm{k}+1)^2 x+y-4z=0 \\ x+y+2kz=0 \end{cases} \mathrm{k}\in\mathrm{R}$$

3) Dato il seguente sistema (4 incognite):

$$\begin{cases} 2\mathrm{x}-\mathrm{y}-\mathrm{z}+\mathrm{t}=0 \\ y-z=2 \\ 2x+ky=k \\ x-z+t=1 \end{cases} \qquad \mathrm{k}\in\mathrm{R}$$

a) si discuta la compatibilità del sistema omogeneo associato;
b) si discuta la compatibilità del sistema;
c) si risolva il sistema per k=-2,