# Esercitazioni di Algebra e Geometria

Anno accademico 2009-2010

**Dott.ssa Sara Ferrari**

e-mail sara.ferrari@ing.unibs.it

**Esercitazioni**: martedì 8.30-10.30

venerdì 9.30-11.30

**Attenzione: le lezioni del venerdì iniziano esattamente alle 9.30.**

**Ricevimento studenti**: venerdì 8.30-9.25

presso il dipartimento di matematica (via Valotti).

Le tracce per le esercitazioni saranno reperibili alla pagina:

http://dm.ing.unibs.it/~stefano.pasotti/algebrageometria.php

# Matrice

Una matrice *m x n* a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ è una *'tabella'* con:

*m* righe

*n* colonne

i cui elementi, detti entrate, appartengono al campo $\mathbb{K}$.

Esempi di campi sono:

$\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali,

$\mathbb{R}$ il campo dei reali,

$\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

**Esempio**

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \pi & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

È una matrice 2x3 a coefficienti reali.

La notazione $(\ldots)$ è equivalente a $[\ldots]$ oppure $\|\ldots\|$.

Per rappresentare una generica matrice di m righe e n colonne useremo la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Indicando il nome della matrice con una lettera maiuscola dell'alfabeto latino e le entrate con la stessa lettera minuscola.

Notazione più sintetica è:

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

dove $a_{i,j}$ è l'elemento che si trova in posizione (i,j) cioè sulla i-esima riga e j-esima colonna.

Nell'esempio precedente:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \pi & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$b_{1,1}$=-3 $\quad$ $b_{1,2}$=… $\quad$ $b_{1,3}$=…

$b_{2,1}$=… $\quad$ $b_{2,2}$=… $\quad$ $b_{2,3}$=…

con $b_{i,j} \in \mathbb{R}$ e gli indici i=1,2 e j= 1, 2, 3.

L'insieme delle matrici di dimensioni *mxn* sullo stesso campo $\mathbb{K}$ è indicato con $\mathbb{K}^{m,n}$.

$\mathbb{Q}^{m,n}$ ha per oggetti le matrici *mxn* a entrate razionali,

$\mathbb{R}^{m,n}$ ha per oggetti le matrici *mxn* a entrate reali,

$\mathbb{C}^{m,n}$ ha per oggetti le matrici *mxn* a entrate complesse.

Casi particolari:

a) m=1 si ottengono **matrici riga** di dimensioni *1xn* a coefficienti in $\mathbb{K}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{1,\mathrm{n}}$$

b) n=1 si ottengono **matrici colonna** di dimensioni *mx1* a coefficienti in $\mathbb{K}$.

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{m,1} \end{pmatrix} \in K^{m,1}$$

c) n=m si ottengono **matrici quadrate** di dimensioni *nxn* a coefficienti in $\mathbb{K}$. Il numero **n** è detto **ordine** della matrice quadrata.

$$C=\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & a_{2,2} & c_{2,3} & \cdots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \cdots & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

appartiene a $\mathbb{K}^{n,n}$ ma di solito tale insieme si indica $M_n(\mathbb{K})$. Ovviamente n=m=1 è una matrice con un'unica entrata $C=(c_{1,1})$.

**Esempi**

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt[3]{2}}{3} & \sqrt{6} & 4 \end{pmatrix} \in R^{1,5}$$

è una **matrice riga** con 5 entrate coefficienti reali.

$$B=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ \frac{e-1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \in R^{5,1}$$

è una **matrice colonna** con 5 entrate coefficienti reali.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \pi & 4 & 5 \\ \sqrt[5]{2} & 0 & -1 & 7 & -6 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & 3 & 2 & -4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & \sqrt{3} & -2 & 8 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 5 & -\sqrt{5} & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_6(\mathrm{R})$$

è una **matrice quadrata** di ordine 6 con 6×6=36 entrate coefficienti reali.

# Operazioni con le matrici

## La somma di matrici

Siano A, B due matrici di $\mathbb{K}^{m,n}$.

Indichiamo A+B una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ così definita:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

Quindi la matrice A+B ha in posizione (i,j) l'elemento ottenuto sommando $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ in $\mathbb{K}$:

$$A+B=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} + \left(b_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

**Osservazioni:**

1) prima di eseguire la somma tra due matrici controllare sempre che abbiano lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.

2) La matrice O di $\mathbb{K}^{m,n}$ con entrate tutte nulle $o_{i,j}=0$ per ogni i=1,…,m e j=1,…,n funge da elemento neutro rispetto alla somma di $\mathbb{K}^{m,n}$ ed è detta **matrice nulla** di $\mathbb{K}^{m,n}$:

$$O+A=A+O=A.$$

**Esercizio**

Date le seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt[3]{5} \end{pmatrix}$$

Calcolare, ove sia possibile, A+B, B+C, A+D, A+A, B+(B+B) e (B+C)+C.

a) A+B: l'operazione non è definita in quanto…

b) B+C: l'operazione è definita e la matrice somma è:

$$B+C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 4 & 6\\ -2 & \sqrt{2} & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+(-1) & 0+0 & 1+0\\ 0+\frac{2}{3} & -3+4 & 0+6\\ 4+(-2) & 5+\sqrt{2} & 7+(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ \frac{2}{3} & 1 & 6\\ 2 & 5+\sqrt{2} & 5\end{pmatrix}$$

c) A+D: l’operazione non è definita in quanto…

d) A+A: l’operazione è definita

$$A+A=\begin{pmatrix}-1 & 10 & 3\\ -2 & 0 & \frac{2}{5}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 10 & 3\\ -2 & 0 & \frac{2}{5}\end{pmatrix}=...=\begin{pmatrix}-2 & 20 & 6\\ -4 & 0 & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

e) B+(B+B) le operazioni sono definite:

$$B+(B+B)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & -6 & 0\\ 8 & 10 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 3\\ 0 & -9 & 0\\ 12 & 15 & 21\end{pmatrix}$$

f) (B+C)+C le operazioni sono definite:

$$(B+C)+C=\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 6 \\ 2 & 5+\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 5 & 12 \\ 0 & 5+2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Dagli esempi d) ed e) posso osservare che data una matrice

$$A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

è possibile calcolare

$$A+A=\left(2a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}\ ,\ (A+A)+A=\left(3a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

e così via.

Possiamo generalizzare e definire:

## Il prodotto tra uno scalare e una matrice

Siano A una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ uno scalare.

Indichiamo $\lambda A$ una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ così definita:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

**Esempio**

$$-3C = -3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & -12 & -18 \\ 6 & -3\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt[3]{2}\, D = \sqrt[3]{2} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt[3]{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt[3]{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{2} \\ 0 & \sqrt[3]{10} \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice finale $\lambda A$ ha in qualsiasi posizione (i,j) l'elemento $a_{i,j}$ moltiplicato per lo scalare $\lambda$ in $\mathbb{K}$.

## Esercizi da svolgere

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si eseguano, quando possibile, le seguenti operazioni con le matrici:

*A+B, C+D, A+C;*

*A - B, C – D, B – C;*

*-A, 2B, -3C, -2D;*

*A – 2B, 2C + D , 2A+3D.*

## Il prodotto tra matrici

Prima di tutto definiamo cosa si intende per **prodotto tra matrice riga e matrice colonna.**

Siano A, matrice riga di $\mathbb{K}^{1,n}$, e B, matrice colonna di $\mathbb{K}^{n,1}$: indichiamo con A·B un elemento di $\mathbb{K}$ così definito

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \dots + a_{1,n}b_{n,1}$$

Osservazione:

il prodotto è definito solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

**Esempio**

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\sqrt{2} + 1(-4) + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 3 = 6 - 3\sqrt{2}$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non è definito.

Allora, date $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,p}$, definiamo il **prodotto tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B**:

$$A_i \cdot B_j = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$

Osservazione: il prodotto è definito perché il numero delle colonne di A è n per ipotesi uguale al numero di righe di B.

Il prodotto tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B può essere così scritto:

$$A_i \cdot B_j = \left(a_{i,h}\right)_{h=1,\dots,n}\left(b_{h,j}\right)_{h=1,\dots,n} = \sum_{h=1,\dots,n} a_{i,h} \cdot b_{h,j}$$

**Esempio**

Date

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

il prodotto tra una riga di A e una colonna di C è sempre definito. Per esempio il prodotto tra la 2-riga di A e la 3-colonna di C è:

$$A_2 \cdot C_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + \frac{2}{5} \cdot (-2) = -\frac{4}{5}$$

Attenzione: il prodotto tra una riga di C e una colonna di A non è definito.

Definiamo ora il **prodotto tra due matrici**:

date due matrici A $\in \mathbb{K}^{m,n}$ e B $\in \mathbb{K}^{n,p}$, definiamo il **prodotto AB una matrice di $\mathbb{K}^{m,p}$ il cui elemento in posizione (i,j) si ottiene moltiplicando la i-esima riga di A per la j-esima colonna di B**

$$(AB)_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$

$$= \sum_{h=1,\dots,n} a_{i,h} \cdot b_{h,j}$$

Osservazioni:

1) Il prodotto AB è definito solo se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B. Se il prodotto AB è definito la matrice risultante ha il numero delle righe di A e il numero delle colonne di B.

2) Se è definito AB, non è detto che lo sia BA: per esempio A matrice di $\mathbb{R}^{3,2}$ e B matrice di $\mathbb{R}^{2,1}$

3) Se sono definiti AB e BA non è detto che AB=BA: esempio A matrice di $\mathbb{R}^{2,1}$ e B matrice di $\mathbb{R}^{1,2}$.

**Esempi**

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare, se possibile, AC, CA, CH e HC.

$$AC=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)+10\cdot\frac{2}{3}+3\cdot(-2) & (-1)\cdot 0+4\cdot 10+3\sqrt{2} & (-1)\cdot 0+10\cdot 6+3\cdot(-2) \\ -2\cdot(-1)+0\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}(-2) & (-2)\cdot 0+4\cdot 0+\frac{2}{5}\sqrt{2} & (-2)\cdot 0+0\cdot 6+\frac{2}{5}\cdot(-2) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \ldots & 40+3\sqrt{2} & \ldots \\ \frac{6}{5} & \frac{2}{5}\sqrt{2} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

CA impossibile perché…

$$\text{CH}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\text{HC}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \ldots & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & \ldots & -2 \end{pmatrix}$$

**Osservazioni per le matrici quadrate**

a) Data $A\in M_n(\mathbb{K})$ è possibile definire ricorsivamente $A^r = A\,A^{r-1}$ con $r\in\mathbb{N}$, $r\geq 2$ .

b) Date $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ è sempre possibile calcolare $AB$ e $BA$ (in genere matrici diverse).

c) Indicata con $I_n = (i_{k,j})_{k,j=1,\dots,n}$ la matrice così definita:

$$i_{k,j}=0 \quad \text{se} \quad k \neq j$$

$$i_{k,j}=1 \quad \text{se} \quad k = j$$

allora $A\, I_n = I_n\, A = A$ qualsiasi $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$I_n$ è la matrice che funge da unità (rispetto al prodotto di matrici) per le matrici quadrate di ordine n su $\mathbb{K}$ ed è detta matrice identica.

**Esempio**

$$CI_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = C$$

$$I_3\, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = C$$

## Esercizio da svolgere

Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare, quando possibile,

$AB$, $BA$, $CD$, $DC$;

$A^2$, $BC$, $BD$;

$A^2 - I_3$, $A(A^2-3B)$.