Esercizi di riepilogo

Esercizio 1

In $E_3(\mathbb{R})$ si determinino:

[(a)] una rappresentazione cartesiana della sfera di centro C=(1,2,1) e raggio R=5;

[(b)] una rappresentazione cartesiana della retta passante per C e ortogonale al piano coordinato xz.

[(c)] le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S, essendo A il punto di coordinate positive.

[(d)] una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento AC e ortogonale alla retta s;

[(e)] centro C′ e raggio r di $\mathcal{C}$.

a) usando la formula

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=r^2$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25}$$

b) Piano xz ha equazione y=0 $\Rightarrow$ i parametri direttori di una retta ortogonale sono [(0,1,0)] passante per C=(1,2,1):

$$\boxed{x-1=z-1=0.}$$

c) Risolvendo il sistema che rappresenta l'intersezione tra sfera e retta si ottiene $(y-2)^2 = 25$ da cui $y-2=\pm 5$;

con y=7 si ottiene $\boxed{A=(1,7,1),}$

con y=-3 si ottiene $\boxed{B=(1,-3,1).}$

d) Il punto medio $M_{AC}=(1,9/2,1)$; il piano σ è parallelo al piano coordinato xz e passa per M_{AC}:

$$y-9/2=0.$$

Allora la circonferenza ha equazioni:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z - 19 = y - 9/2 = 0}$$

e) La retta ortogonale a γ passante per C è s; intersecandola con il piano σ : $\boxed{C' = (1,\ 9/2,1) = M_{AC}}$.

Per trovare il raggio applico il teorema di Pitagora sapendo che la distanza centro della sfera-piano γ è 5/2 : r= $\boxed{\sqrt{25-\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}}$.

Esercizio 2

Si considerino le rette in $E_3(\mathbb{R})$:

$$r:\begin{cases} kx-4z=2k \\ y=-1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-kz=0 \\ y-(k-2)z=0 \end{cases}$$

[(a)] si dica per quali valori del parametro reale k le rette r e s risultano sghembe, parallele o incidenti.

[(b)] Nel caso parallele si determino la classe dei parametri direttori e un'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.

[(c)] Nel caso incidenti si determinino le coordinate del punto comune e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

a) Studiando il rango partendo dal determinante di

$$\begin{vmatrix} k & 0 & -4 & 2k \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0+2k & -4 & 2k \\ 0 & 1-1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \end{vmatrix} = -1(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} k & 2k & -4 \\ 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 2-k \end{vmatrix} =$$

$$= -(3k^2 - 4k - 4) = -(3k+2)(k-2)$$

deduciamo che r e s sono sghembe per k≠2 e k≠-2/3; per k=2 le matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno rango 2 e 3: rette parallele distinte;

per k= - 2/3 le matrici

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 8/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & -4 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 1 & 8/3 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe rango 3: rette incidenti.

b) È facile individuare i parametri direttori di r $\boxed{[(2,0,1)].}$ Nel fascio di piani di asse r impongo il passaggio per O=(0,0,0)$\in$s: $\boxed{x+2y-2z=0}$

c) Risolvendo il sistema (un s.p.e., per esempio II,III e IV eq) si ottiene x=-1/4, y=-1, z=3/8 da cui:

$$\boxed{P=(-1/4,-1,3/8)}.$$

Di nuovo nel fascio di piani di asse r impongo il passaggio per $O=(0,0,0)\in s$: $\boxed{x+2y+6z=0.}$

Esercizio 3

Si considerino le rette in $E_3(\mathbb{R})$:

$r: y+2z-2=2x-3z-1=0 \qquad s: y-1=5x+z-6=0$

[(a)] Si indichi la mutua posizione di queste rette:

[(b)] Si determini un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r parallela a s:

[(c)] Si determini un'equazione cartesiana del piano passante per Q= (0,2,0) e parallelo ad r e s:

[(d)] Si determini la retta di minima distanza:

a) Il rango di

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

è 4: rette sghembe.

b) I parametri direttori di s sono [(1,0,-5)]; nel fascio di piani di asse r

$\alpha(y+2z-2)+\beta(2x-3z-1)=0$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$ impongo il parallelismo con s: $-10\alpha+17\beta=0 \Rightarrow \alpha=17\beta/10$ da cui:

$$\boxed{20x+17y+4z-44=0}$$

c) Il piano parallelo a r e s (rette sghembe) appartiene al fascio di piani paralleli al precedente $20x+17y+4z+k=0$;

imponendo il passaggio per Q: $\boxed{20x+17y+4z-34=0}$

d) la retta di minima distanza è perpendicolare ai piani paralleli che contengono r e s: ha parametri direttori [(20,17,4)].

Nel fascio di piani di asse r:

$\alpha(y+2z-2)+\beta(2x-3z-1)=0$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$ impongo il parallelismo con la direzione [(20,17,4)] ottenendo $25\alpha+28\beta=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-\ 28\beta/25$ da cui si ottiene

$$\underline{50x-28y-131z+31=0}$$

Analogamente nel fascio di asse s

$\alpha(y-1)+\beta(5x+z-6)=0$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$ impongo il parallelismo con la direzione [(20,17,4)] ottenendo $17\alpha+104\beta=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-\ 104\ \beta/17$ da cui si ottiene

$$\underline{85x-104y+17z+2=0.}$$

Allora la retta di minima distanza ha equazione:

$$\boxed{50x-28y-131z+31=85x-104y+17z+2=0}$$

Esercizio 4

[(a)] Si determini in $E_3(\mathbb{R})$ l'equazione del piano passante per i tre punti O=(0,0,0), A=(1,1,2) e B=(0,4,4);

[(b)] una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i tre punti O, A e B;

[(c)] le coordinate del centro e la misura del raggio della circonferenza $\mathcal{C}$;

[(d)] Si determini una rappresentazione cartesiana della retta tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ in O (sul piano della circonferenza).

a) Con la formula

$$\det\begin{pmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_A-x_o & y_A-y_o & z_A-z_o \\ x_B-x_o & y_B-y_o & z_B-z_o \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$ uguagliata a zero

$$\boxed{\sigma\text{: } x+y-z=0.}$$

b) Il centro della circonferenza deve essere equidistante da O, da A e da B, dunque appartiene ai piani assiali di OA e OB:

$$\alpha_{OA}\text{: } x+y+2z-3=0$$

$$\alpha_{OB}\text{: } y+z-4=0.$$

Il centro della circonferenza è il punto $\sigma\cap\alpha_{OA}\cap\alpha_{OB}$: $C'=(-2,3,1)$; il raggio è la distanza $r=C'O=\sqrt{14}$. Dopo aver costruito la sfera di centro C' e raggio r, si ottiene

$$\boxed{(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2-14= x+y-z=0}$$

c) Per costruzione coincidono con il centro e il raggio della sfera: $\boxed{C=(-2,3,1)\ r=\sqrt{14}}$.

d) La direzione di CO è data

$$[(x_O-x_C,y_O-y_C,z_O-z_C)]=[(2,-3,-1)];$$

dunque il piano tangente alla sfera appartiene al fascio di piani 2x-3y-z+k=0. Dovendo essere tangente in O=(0,0,0) si ottiene k=0.

La retta tangente alla circonferenza è l'intersezione tra il piano della circonferenza e il piano tangente alla sfera:

$$\boxed{x+y-z=2x-3y-z=0}.$$

Esercizio 5

Date in $E_3(\mathbb{R})$ le rette r: 2x+y=x-3z=0,

s: x+y-3z+3=2x-z+4=0 e il punto P=(1,1,3):

[(a)] si determini l'equazione cartesiana del piano per P ortogonale a r;

[(b)] Si determini l'equazione parametrica della retta parallela a s passante per P.
[(c)] Si determinino le equazioni cartesiane del luogo dei punti descritto dalla rotazione di P attorno a r.
[(d)] si determini l'equazione del piano contenente r e il punto S=(-1,2,0)

a) I parametri direttori di r sono [(3,-6,1)]; i piani ortogonali a r appartengono al fascio di equazione 3x-6y+z+k=0. Il piano passante per P (k=0): $\boxed{3x-6y+z=0}$.
b) I parametri direttori della retta s sono [(1,5,2)]. La retta per P parallela a s: $\boxed{\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+5\lambda \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = 3+2\lambda \end{cases}}$

c) Il piano ortogonale a r passante per P ha equazione
3x-6y+z=0. La rotazione avviene su tale piano. La circonferenza descritta ha centro nel punto d'intersezione di questo piano con r: O=(0,0,0). Il

raggio è la distanza OP=$\sqrt{11}$. Dopo aver costruito la sfera di centro O e raggio OP, la circonferenza è:

$$\gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-11=0 \\ 3x-6y+z=0 \end{cases}$$

d) Nel fascio di piani di asse r $\alpha(2x+y)+\beta(x-3z)=0$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)\in R^2$ imponiamo il passaggio per S: si ottiene $\beta=0$; allora il piano è $\boxed{2x+y=0}$.

Esercizio 6

Data la conica di equazione in $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$

$$\mathscr{C}: x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

[(a)] riconoscerla mediante la classificazione affine;

[(b)] determinare il centro in coordinate omogenee;

[(c)] per quale valore di k reale la retta kx+2y-1=0 è diametro;

[(d)] determinare la retta tangente in O=(0,0) alla conica.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ detA=-1 e detA*=0

$\boxed{\text{conica propria, parabola}}$.

b) i diametri polari di X_∞ e Y_∞ sono x+y-2=0 e x+y-1=0: si intersecano nel punto improprio $\boxed{[(1,-1,0)].}$

c) La retta è diametro se passa per il centro, cioè se è parallela a x+y-2=0: $\boxed{k=2}$.

d) Calcolando la polare di O=[(0,0,1)], punto della conica, si ottiene la retta tangente di equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

-2x-y=0 cioè $\boxed{y+2x=0.}$